5. e) $\hat{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{h_u} = \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}}$ y $\hat{e}_v = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$. Como el sistema no es ortogonal, $\hat{e}_u \cdot \hat{e}_v = \frac{3}{5} \neq 0$.

**Ejercicio 2B.6.2** ← volver

1. a) $\nabla u = (1,-4,1)$, $\nabla v = (1,0,-1)$, $\nabla w = (2,1,2)$. Productos punto: $1+0-1=0$, $2-4+2=0$, $2+0-2=0$: **ortogonal**.
2. b) $|\nabla u| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $|\nabla v| = \sqrt{2}$, $|\nabla w| = 3$; $\hat{e}_u = \frac{(1,-4,1)}{3\sqrt{2}}$, $\hat{e}_v = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}_w = \frac{(2,1,2)}{3}$.
3. c) $u_u = \vec{u} \cdot \hat{e}_u = \frac{2-4+2}{3\sqrt{2}} = 0$; $u_v = \frac{2-2}{\sqrt{2}} = 0$; $u_w = \frac{4+1+4}{3} = 3$.
4. $\vec{u} = 3\,\hat{e}_w$.

**Ejercicio 2B.6.3** ← volver

1. $\vec{r}_u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\vec{r}_v = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$: ortogonal.
2. $h_u = h_v = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $f_u = 4\sqrt{2}\,u^3v^3$ y $f_v = 3\sqrt{2}\,u^4v^2$.
4. $\nabla f = \dfrac{4\sqrt{2}\,u^3v^3}{\sqrt{2}/2}\,\hat{e}_u + \dfrac{3\sqrt{2}\,u^4v^2}{\sqrt{2}/2}\,\hat{e}_v = 8u^3v^3\,\hat{e}_u + 6u^4v^2\,\hat{e}_v$.

**Ejercicio 2B.6.4** ← volver

1. $x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} = \rho\,\hat{e}_\rho$ y $x^2 + y^2 = \rho^2$, así que $\vec{F} = \rho^3\,\hat{e}_\rho + z\,\hat{e}_z$.
2. $\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho \cdot \rho^3)}{\partial \rho} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = \dfrac{4\rho^3}{\rho} + 1 = 4\rho^2 + 1$.
3. Comprobación en cartesianas: $P = x^3 + xy^2$, $Q = x^2y + y^3$, $R = z$; $P_x + Q_y + R_z = 4x^2 + 4y^2 + 1$.

**Ejercicio 2B.6.5** ← volver

1. $\vec{r} = (u\cos\theta,\ v\,\mathrm{sen}\,\theta,\ u^2 + v^2)$.
2. a) $\vec{e}_\theta = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-u\,\mathrm{sen}\,\theta,\ v\cos\theta,\ 0)$. Su unitario es $\hat{e}_\theta = \dfrac{(-u\,\mathrm{sen}\,\theta,\ v\cos\theta,\ 0)}{\sqrt{u^2\mathrm{sen}^2\theta + v^2\cos^2\theta}}$.
3. b) $\vec{r}_v = (0,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ 2v)$, así que $h_v = \sqrt{\mathrm{sen}^2\theta + 4v^2}$.
4. c) Con $\vec{r}_u = (\cos\theta, 0, 2u)$: $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -u\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta & v\cos\theta \\ 2u & 2v & 0 \end{vmatrix}$.
5. Desarrollando por la primera fila: $\cos\theta\,(0 - 2v^2\cos\theta) - 0 + (-u\,\mathrm{sen}\,\theta)(0 - 2u\,\mathrm{sen}\,\theta) = 2u^2\mathrm{sen}^2\theta - 2v^2\cos^2\theta$.

**Ejercicio 2B.6.6** ← volver

1. $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rF_r)}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^3z + \frac{r^2}{2}\mathrm{sen}\,\theta\right) = 3rz + \mathrm{sen}\,\theta$.
2. $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_\theta}{\partial \theta} = \dfrac{1}{r}(-r\,\mathrm{sen}\,\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$.
3. $\dfrac{\partial F_z}{\partial z} = -3rz$.
4. $\nabla \cdot \vec{F} = 3rz + \mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\theta - 3rz = 0$: **el campo es solenoidal**.





3. Obtén la sombra $R$: si dice $z \geq c$, iguala $g = c$.
4. Flujo $= \iint_R \vec{F} \cdot \vec{N}\,dA$, en polares si $R$ es un disco.
5. Comprobación opcional: cierra la superficie con una tapa plana, aplica Gauss y resta el flujo de la tapa.

*4B.3.4 Integral triple en cilíndricas o esféricas*

1. **Dibuja** el sólido: piso, techo y sombra.
2. Elige coordenadas: cilíndricas si hay $x^2 + y^2$ (cilindro, cono, paraboloide); esféricas si hay $x^2 + y^2 + z^2$ (esfera).
3. Traduce el integrando ($\sqrt{x^2 + y^2} = r$) y escribe $dV$ **con su jacobiano**.
4. Límites: $z$ de piso a techo; $r$ del centro al radio de la sombra; $\theta$ según la región. Los de adentro pueden tener letras; el de afuera, solo números.
5. Integra de adentro hacia afuera.

*4B.3.5 Flujo con el teorema de Gauss (divergencia constante)*

1. Comprueba que la superficie es **cerrada** y escríbelo: «$S$ es cerrada; por el teorema de Gauss…».
2. Escribe $P$, $Q$ y $R$ en renglones separados.
3. Deriva $P$ solo respecto a $x$, $Q$ solo respecto a $y$ y $R$ solo respecto a $z$. Si una letra no aparece, ese término vale 0. Suma.
4. Si la divergencia es un número $c$: obtén las medidas del sólido (el radio de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ es 5) y su volumen con la tabla de 4B.1.
5. Flujo $= c \cdot V$. Déjalo exacto, con $\pi$.

*4B.3.6 Gauss con divergencia variable*

1. Calcula la divergencia; suele quedar algo como $3y + 2z$, $x^2$, $2z$ o $x^2 + y^2$.
2. **Simetría:** quita los términos $x$, $y$ (y $z$, en una esfera centrada) cuyo integral vale cero por simetría.
3. Si queda una constante, multiplícala por el volumen.
4. Si queda un término como $x^2$, $x^2 + y^2$ o $z$, integra en cilíndricas o esféricas (4B.3.4).
5. Si el volumen no es de tabla, calcúlalo con una integral doble: $V = \iint_R (z_{techo} - z_{piso})\,dA$.

*4B.3.7 ¿Entra o sale fluido? (divergencia en cilíndricas)*

1. Identifica $F_r$, $F_\theta$ y $F_z$.
2. Término 1: multiplica $F_r$ por $r$, deriva respecto a $r$ y divide entre $r$.
3. Término 2: deriva $F_\theta$ respecto a $\theta$ y divide entre $r$.
4. Término 3: deriva $F_z$ respecto a $z$.
5. Suma y evalúa en el punto. **Negativa: entra más del que sale.** Positiva: sale más. Cero: igual.
6. Atajo: $r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z$ es el campo $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, con divergencia 3.

*4B.3.8 Campo radial unitario sobre una esfera*

1. $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ tiene divergencia $\frac{2}{\rho}$, que no es constante y no está definida en el origen. **No conviene Gauss.**

3. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \big(0,\ 0,\ (2e^{2\pi})(-4) - 0\big) = (0, 0, -8e^{2\pi})$, con norma $8e^{2\pi}$.
4. $|\vec{r}\,'|^3 = 8e^{6\pi}$, así que $\kappa = \dfrac{8e^{2\pi}}{8e^{6\pi}} = e^{-4\pi}$.

**Ejercicio 2A.6.3** ← volver

1. $4\,\mathrm{sen}\,t = 4 \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$. Comprobación: $1 - \sqrt{8}\cos\frac{\pi}{2} = 1$.
2. $\vec{r}\,' = (\sqrt{8}\,\mathrm{sen}\,t,\ \sqrt{8}\,\mathrm{sen}\,t,\ 4\cos t) \Rightarrow (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$; $\vec{r}\,'' = (\sqrt{8}\cos t,\ \sqrt{8}\cos t,\ -4\,\mathrm{sen}\,t) \Rightarrow (0, 0, -4)$.
3. a) $|\vec{r}\,'| = \sqrt{8+8} = 4$, así que $\hat{T} = \frac{(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)}{4} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$.
4. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = (-8\sqrt{2},\ 8\sqrt{2},\ 0)$, con norma 16.
5. b) $\kappa = \dfrac{16}{4^3} = \dfrac{1}{4}$ y $\rho = 4$.
6. c) Normal $(-1, 1, 0)$ por $(1, 1, 4)$: $-(x-1) + (y-1) = 0$, es decir, $x - y = 0$.

**Ejercicio 2A.6.4** ← volver

1. $\cos t = 1$, $\mathrm{sen}\,t = 0 \Rightarrow t_0 = 0$. Comprobación: $1 + 0 + 1 = 2$.
2. $\vec{r}\,' = (-\mathrm{sen}\,t,\ \cos t,\ -\mathrm{sen}\,t + \cos t) \Rightarrow (0, 1, 1)$; $\vec{r}\,'' = (-\cos t,\ -\mathrm{sen}\,t,\ -\cos t - \mathrm{sen}\,t) \Rightarrow (-1, 0, -1)$.
3. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \big((1)(-1) - (1)(0),\ -[(0)(-1) - (1)(-1)],\ (0)(0) - (1)(-1)\big) = (-1, -1, 1)$, con norma $\sqrt{3}$.
4. a) $\hat{T} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{B} = \frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}$.
5. $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{6}}\big((-1)(1) - (1)(1),\ -[(-1)(1) - (1)(0)],\ (-1)(1) - (-1)(0)\big) = \frac{(-2,1,-1)}{\sqrt{6}}$.
6. b) Plano normal ($\perp \hat{T}$) por $(1, 0, 2)$: $y + (z - 2) = 0$, es decir, $y + z = 2$.

**Ejercicio 2A.6.5** ← volver

1. $A(0, 0, 3)$ corresponde a $s = 0$. Sea $k = \frac{1}{\sqrt{10}}$.
2. $\vec{r}\,' = (3k\cos ks,\ k,\ -3k\,\mathrm{sen}\,ks) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1, 0)$, que ya es unitario: $\hat{T} = \frac{(3,1,0)}{\sqrt{10}}$.
3. $\vec{r}\,'' = (-3k^2\,\mathrm{sen}\,ks,\ 0,\ -3k^2\cos ks) \Rightarrow \big(0, 0, -\frac{3}{10}\big)$. Como $s$ es longitud de arco, $\kappa = |\vec{r}\,''| = \frac{3}{10}$ y $\hat{N} = \frac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,''|} = (0, 0, -1)$.
4. $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1, 0) \times (0, 0, -1) = \frac{(-1,3,0)}{\sqrt{10}}$.
5. $\vec{r}\,''' = (-3k^3\cos ks,\ 0,\ 3k^3\,\mathrm{sen}\,ks) \Rightarrow (-3k^3, 0, 0) = \big(-\frac{3}{10\sqrt{10}}, 0, 0\big)$; $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = (-3k^3,\ 9k^3,\ 0) = \big(-\frac{3}{10\sqrt{10}},\ \frac{9}{10\sqrt{10}},\ 0\big)$, con norma al cuadrado $\frac{90}{1000} = \frac{9}{100}$.
6. $\tau = \dfrac{(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \cdot \vec{r}\,'''}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2} = \dfrac{\big(-\frac{3}{10\sqrt{10}}\big)\big(-\frac{3}{10\sqrt{10}}\big)}{\frac{9}{100}} = \dfrac{\frac{9}{1000}}{\frac{9}{100}} = \dfrac{1}{10}$.

**Ejercicio 2A.6.6** ← volver

1. En $A(1, 5, 4)$: $4 - 3t^2 = 1 \Rightarrow t = 1$ (al despegar, $t \geq 0$).
2. $\vec{r}\,' = (-6t,\ 0,\ 8t)$ y $|\vec{r}\,'| = \sqrt{36t^2 + 64t^2} = 10t$.





2. Sombra: disco $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
3. $A = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\; r\,dr\,d\theta$.
4. En $r$: $\left[\dfrac{(1+4r^2)^{3/2}}{12}\right]_0^{\sqrt{2}} = \dfrac{9^{3/2} - 1}{12} = \dfrac{27 - 1}{12} = \dfrac{13}{6}$.
5. En $\theta$: $\frac{13}{6} \cdot 2\pi$.

**Resultado:** $A = \frac{13\pi}{3}$ u².

### Ejercicio 4B.5.2 · Integral de superficie sobre un octante de esfera

*Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 5.*

Calcule $\displaystyle\iint_S xz\,dS$, donde $S$ es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$.

**Resolución.**

1. Parametrización: $x = 3\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta$, $y = 3\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = 3\cos\phi$, con $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $dS = 9\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta$.
2. $xz\,dS = (3\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta)(3\cos\phi)(9\,\mathrm{sen}\,\phi)\,d\phi\,d\theta = 81\,\mathrm{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta\,d\phi\,d\theta$.
3. Se separa: $81\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\phi\cos\phi\,d\phi = 81\cdot 1\cdot\left.\frac{\mathrm{sen}^3\phi}{3}\right|_0^{\pi/2} = 81\cdot\frac{1}{3}$.

**Resultado:** 27.

### Ejercicio 4B.5.3 · Flujo directo por un paraboloide

*Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 5.*

Calcule el flujo del campo eléctrico $\vec{E} = y\,\hat{\imath} - x\,\hat{\jmath} + (z+1)\,\hat{k}$ a través de la superficie $x^2 + y^2 + z = 2$, donde $z \geq -2$. La superficie se orienta hacia la parte negativa del eje $Z$.

**Resolución.**

1. La superficie es $z = g = 2 - x^2 - y^2$ y **no es cerrada**: Gauss no se aplica directo.
2. Normal hacia arriba: $(-g_x, -g_y, 1) = (2x, 2y, 1)$. Hacia abajo: $\vec{N} = (-2x, -2y, -1)$.
3. Sobre la superficie, $z + 1 = 3 - x^2 - y^2$. Entonces $\vec{E}\cdot\vec{N} = -2xy + 2xy - (3 - x^2 - y^2) = -(3 - r^2)$.
4. Sombra: $z = -2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, disco $r \leq 2$.
5. Flujo $= \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2} -(3 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = -2\pi\left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = -2\pi(6 - 4) = -4\pi$.
6. **Comprobación con Gauss:** $\nabla\cdot\vec{E} = 0 + 0 + 1 = 1$. Se cierra con la tapa $z = -2$, $r \leq 2$. El volumen encerrado es $\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = 8\pi$. En la tapa, la normal exterior es $-\hat{k}$ y $\vec{E}\cdot(-\hat{k}) = -(z+1) = 1$, así que su flujo es $4\pi$. Por el paraboloide hacia afuera (arriba): $8\pi - 4\pi = 4\pi$; hacia abajo, $-4\pi$.

**Resultado:** $-4\pi$ (con la orientación hacia arriba sería $4\pi$).

# Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

↑ Volver al índice

## E.1 · Unidad 1 · Extremos de funciones de dos o más variables: Hessiano, Lagrange y problemas aplicados

### Ejercicio 1.6.1

← volver

1. $f_x = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -1$ o $x = -2$; $f_y = 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$.
2. $f_{xx} = 2x + 3$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$, de donde $D = 2(2x+3)$.
3. $(-1,-2)$: $D = 2 > 0$ y $f_{xx} = 1 > 0$, **mínimo relativo**; $f = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 4 - 2 - 8 = -\frac{29}{6}$.
4. $(-2,-2)$: $D = -2 < 0$, **punto silla**; $f = -\frac{14}{3}$.

### Ejercicio 1.6.2

← volver

1. $f_x = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$; $f_y = 2y^2 - 8 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$.
2. $f_{xx} = -2$, $f_{yy} = 4y$, $f_{xy} = 0$, de donde $D = -8y$.
3. $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$: $D = 16 > 0$ y $f_{xx} = -2 < 0$, **máximo relativo**; $f = -\frac{16}{3} - \frac{1}{4} + 16 + \frac{1}{2} = \frac{131}{12}$.
4. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$: $D = -16 < 0$, **punto silla**; $f = -\frac{125}{12}$.

### Ejercicio 1.6.3

← volver

1. $f_x = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $f_y = -2y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$.
2. $f_{xx} = 12x^2 - 2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 0$, de donde $D = -2(12x^2 - 2)$.
3. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$: $D = 4 > 0$ y $f_{xx} = -2 < 0$, **máximo relativo**; $f = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 2 = \frac{17}{4}$.
4. $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{2}\right)$: $f_{xx} = 4$, $D = -8 < 0$, **puntos silla**; $f = 4$.

### Ejercicio 1.6.4

← volver

1. $f_x = e^{-x}(2x - x^2 - y^2)$ y $f_y = 2y\,e^{-x}$. Como $e^{-x} \neq 0$: $y = 0$ y $x(2-x) = 0$.
2. Puntos críticos: $(0,0)$ y $(2,0)$.
3. $f_{xx} = e^{-x}(x^2 + y^2 - 4x + 2)$, $f_{yy} = 2e^{-x}$, $f_{xy} = -2y\,e^{-x}$.
4. $(0,0)$: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$; $D = 4 > 0$, **mínimo relativo**, con $f = 0$.
5. $(2,0)$: $f_{xx} = -2e^{-2}$, $f_{yy} = 2e^{-2}$, $f_{xy} = 0$; $D = -4e^{-4} < 0$, **punto silla**, con $f = 4e^{-2}$.

### Ejercicio 1.6.5

← volver

1. $f_x = \frac{9}{2}x^2 + 9x = \frac{9}{2}x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = -2$; $f_y = 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1$; $f_z = -2z + 2 = 0 \Rightarrow z = 1$.
2. $H = \operatorname{diag}(9x+9,\ 4,\ -2)$: $\Delta_1 = 9x + 9$, $\Delta_2 = 4(9x+9)$, $\Delta_3 = -8(9x+9)$.
3. $(0,1,1)$: $(9, 36, -72)$, signos $(+,+,-)$, **punto silla**; $f = 2 - 1 - 4 + 2 + 9 = \mathbf{8}$.
4. $(-2,1,1)$: $(-9,-36,72)$, signos $(-,-,+)$, **punto silla**; $f = -12 + 2 - 1 + 18 - 4 + 2 + 9 = \mathbf{14}$.

### Ejercicio 1.6.6

← volver





semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 3$.

**Resolución.**

1. Cono más tapa: superficie cerrada, se aplica Gauss. $\nabla \cdot \vec{F} = 3$.
2. Medidas: altura $h = 3$; en $z = 3$, $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$, así que el radio es 3.
3. $V = \frac{1}{3}\pi(3)^2(3) = 9\pi$.
4. Flujo $= 3 \cdot 9\pi$.

**Resultado:** $27\pi$.

### Ejercicio 4B.5.8 · Radio de la esfera a partir del flujo

*Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 6.*

Sean $\vec{F} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ y la superficie cerrada $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$. Determine $a$ para que el flujo de $\vec{F}$ a través de $S$ sea $32\pi$.

**Resolución.**

1. $\nabla \cdot \vec{F} = 3$ y $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.
2. Flujo $= 3 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$.
3. $4\pi a^3 = 32\pi \Rightarrow a^3 = 8$.

**Resultado:** $a = 2$ (la única raíz real positiva).

### Ejercicio 4B.5.9 · Divergencia no constante y simetría

*Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 6 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).*

Calcule el flujo de $\vec{F} = (xy - z^2)\,\hat{\imath} + (x^2 + y^2)\,\hat{\jmath} + (z^2 - x)\,\hat{k}$ a través de la esfera $\vec{r}(\theta,\phi) = \big(2\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi,\ 2\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi,\ 2\cos\phi\big)$.

**Resolución.**

1. La parametrización es la esfera de radio **2** centrada en el origen: superficie cerrada.
2. $P_x = y$, $Q_y = 2y$, $R_z = 2z$, así que $\nabla \cdot \vec{F} = 3y + 2z$, que **no** es constante.
3. Flujo $= 3\iiint_V y\,dV + 2\iiint_V z\,dV$.
4. La bola es simétrica respecto a los planos $y = 0$ y $z = 0$: las dos integrales valen 0.

**Resultado:** el flujo es 0.

### Ejercicio 4B.5.10 · Cilindro cortado por un plano inclinado

*Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 6.*

Determine el flujo de $\vec{F} = z^2 \ln y\,\hat{\imath} + 2y\,\hat{\jmath} + e^x\,\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ limitado por los planos $z = 2x + 2y + 6$ y $z = -2$.

**Resolución.**

1. $P_x = 0$ (no hay $x$), $Q_y = 2$, $R_z = 0$ (no hay $z$): $\nabla \cdot \vec{F} = 2$.
2. El volumen no es de tabla: $V = \displaystyle\iint_{r\le 4} \big[(2x + 2y + 6) - (-2)\big]\,dA = \iint_{r\le 4} (2x + 2y + 8)\,dA$.
3. El disco está centrado en el origen: $\iint x\,dA = \iint y\,dA = 0$. Queda $V = 8 \cdot \pi(4)^2 = 128\pi$.
4. Flujo $= 2 \cdot 128\pi$.

**Resultado:** $256\pi$.

# Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Diferencias entre las resoluciones publicadas de los exámenes y los valores verificados en este cuaderno.

### C.1 · Unidad 1 · Extremos de funciones de dos o más variables: Hessiano, Lagrange y problemas aplicados

Sin erratas registradas en esta unidad.

### C.2A · Unidad 2 · Parte A · Funciones vectoriales: curvas, triedro móvil, curvatura, torsión y normal a una superficie

**Guía de extraordinario de 1986, grupo 6, ejercicio 1 (propuesto 2A.6.8):** en la resolución publicada aparecen $t = 1$, $s = 2$, el vector normal $-2\hat{\imath} + 17\hat{\jmath} + 7\hat{k}$, el plano tangente $2x - 17y - 7z + 98 = 0$ y la recta normal $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+4}{17} = \frac{z+4}{7}$. El valor verificado es $s = 2, t = -1$, $\vec{N} = (10, -1, 7)$, el plano $10x - y + 7z + 14 = 0$ y la recta $\frac{x-1}{10} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+4}{7}$.

**Guía de extraordinario de 1986, grupo 7, ejercicio 2 (propuesto 2A.6.9):** en la resolución publicada aparecen $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = -4\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}$ y la recta $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{12}$, $z = -6$. El valor verificado es $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = (48, -72, 0)$, paralelo a $(2, -3, 0)$, y la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3}$, $z = -6$.

### C.2B · Unidad 2 · Parte B · Funciones vectoriales: coordenadas curvilíneas, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

Sin erratas registradas en esta unidad.

### C.3 · Unidad 3 · Integrales de línea: trabajo, campo conservativo y función potencial

**1er extraordinario 2018-2, problema 3 (propuesto 3.6.9):** en la resolución publicada aparece $W = -2$ u.t., al evaluar la función potencial como $1 - (2 + 1)$. El valor verificado es $W = -1$: con $\varphi = \frac{z}{r}\sec^2\theta$, $\varphi(B) = 1$ y $\varphi(A) = 2$.

### C.4A · Unidad 4 · Parte A · Integrales múltiples: integrales dobles, áreas, volúmenes, cambio de variable y teorema de Green

**1er final 2018-2, tipo A, problema 5 (propuesto 4A.6.6):** en la resolución publicada aparece $7\pi$, porque se integró $\theta$ de 0 a $2\pi$. La región solo tiene $y \geq 0$, así que $\theta$ va de 0 a $\pi$; el valor verificado es $\frac{7\pi}{2}$.

### C.4B · Unidad 4 · Parte B · Integrales múltiples: integrales de superficie, integrales triples y teoremas de Stokes y Gauss

Sin erratas registradas en esta unidad.





### Ejercicio 4B.5.14 · Campo radial unitario

*Adaptado de: 2º final 2024-1, tipo A, problema 6 (repetido en el 3er extraordinario 2024-1).*

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = \dfrac{x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

**Resolución.**

1. $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$: su divergencia no es constante y no está definida en el origen, que está dentro de la esfera. Se calcula directo.
2. Radio $a = 2$. En la esfera, $|\vec{r}| = 2$ y $\hat{n} = \frac{\vec{r}}{2}$.
3. $\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{\vec{r}}{2} \cdot \frac{\vec{r}}{2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{4} = 1$.
4. Flujo $= 1 \cdot$ Área $= 4\pi(2)^2$.

**Resultado:** $16\pi$.

## 4B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4B**.

### Ejercicio propuesto 4B.6.1

*Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 6.*

Calcule el flujo de $\vec{F} = 3x\,\hat{\imath} + 2y\,\hat{\jmath} + 4z\,\hat{k}$ a través de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

**Resultado:** $1500\pi$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

### Ejercicio propuesto 4B.6.2

*Adaptado de: 1er extraordinario 2018-2, problema 6.*

Calcule el flujo de $\vec{F} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 2$.

**Resultado:** $8\pi$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

### Ejercicio propuesto 4B.6.3

*Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 6.*

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = \left(x^2y^2 + 3x\right)\hat{\imath} + \left(-\frac{2}{3}xy^3 + 3y\right)\hat{\jmath} + 3z\,\hat{k}$ a través de la superficie cerrada de un cilindro circular recto con tapas, de radio 2 y altura 8.

**Resultado:** $288\pi$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

### Ejercicio propuesto 4B.6.4

*Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 6.*

Utilizando el teorema de la divergencia, calcule $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\,dS$ para $\vec{F} = z\,\hat{\imath} + x^2y\,\hat{\jmath} + y^2z\,\hat{k}$,

| Examen | Problemas |
|---|---|
| 1er final 2017-2, tipo A | rectángulo inscrito con Lagrange · curvatura, torsión, plano osculador, $a_T$ y $a_N$ · constantes para campo irrotacional · trabajo en polares · Green · circulación |
| 1er final 2017-2, tipo C | distancia mínima con Lagrange · constantes para una función armónica · curvatura y radio de torsión · integral de línea sobre una elipse · Stokes · flujo con Gauss |
| 2º final 2017-2, tipo A | puntos críticos · transformación y jacobiano · función armónica, campo solenoidal e irrotacional · integral de línea en cilíndricas · circulación · flujo con Gauss |
| 1er final 2018-1, tipo A (el tipo B trae los mismos problemas en otro orden) | distancia mínima a un plano · triedro y torsión de una intersección · campo solenoidal e irrotacional en cilíndricas · trabajo en cilíndricas · integral de línea cerrada · flujo con Gauss |
| 2º final 2018-1, tipo A | caja con tapa · triedro, curvatura, centro de curvatura y plano osculador · laplaciano · integral de línea en cilíndricas sobre una circunferencia · Stokes · flujo con Gauss |
| 1er final 2018-2, tipo A | caja sin tapa con Lagrange · $a_T$ y $a_N$ · radio y circunferencia de curvatura · trabajo sobre una curva cerrada con campo conservativo · Green · flujo por un elipsoide |
| 1er final 2018-2, tipo C | caja inscrita en un paraboloide · longitud de arco · transformación lineal y gradiente · trabajo con campo conservativo · volumen · Green |
| 2º final 2018-2, tipo A (repetido en el 2º extraordinario 2018-2) | Lagrange · ángulo entre una curva y una superficie paramétrica · transformación ortogonal y divergencia · constante para campo conservativo y potencial · área con integral doble · Stokes |
| 1er final 2024-1, tipo A (el tipo B cambia los datos) | puntos críticos · posición tras recorrer una longitud de arco · transformación lineal y jacobiano · trabajo · integral doble en polares · flujo con Gauss |
| 1er final 2024-2 | distancia mínima con Lagrange · curvatura · transformación lineal en 3 variables · trabajo · área con integral doble |
| 2º final 2024-2, tipo A | puntos críticos en 3 variables · $a_T$ y $a_N$ · gradiente en curvilíneas · trabajo · integral de superficie |
| 1er final 2025-1, tipo A | extremos en una región cerrada · hélice: longitud de arco y triedro · transformación lineal · trabajo por dos trayectorias · área de un pétalo en polares · Stokes |
| 2º final 2025-1, tipo A | puntos críticos · tangente, curvatura y plano osculador · transformación y jacobiano · trabajo en polares · integral doble en polares · flujo con Gauss |
| 1er final 2025-2, tipo A | caja inscrita en un elipsoide · triedro, curvatura y torsión · transformación lineal y área imagen · trabajo · volumen bajo una superficie |





### Ejercicio propuesto 4B.6.10

*Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 6.*

Calcule el área del cilindro $y = x^2$ limitada por el primer octante y por los planos $x = 1$ y $z = x$.

**Resultado:** $\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$ u².

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

### Ejercicio propuesto 4B.6.11

*Adaptado de: 2º final 2016-2, tipo A, problema 5.*

Determine $\iint_S xy^2\,dS$, donde $S$ es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ limitada por el primer octante y por el plano $z = 2$.

**Resultado:** $\frac{32}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

### Ejercicio propuesto 4B.6.12

*Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 5.*

Calcule la circulación de $\vec{F} = (2x - 2y)\,\hat{\imath} + (y - z)\,\hat{\jmath} + (x - z)\,\hat{k}$ alrededor de la parte del plano $x + 2y + 2z = 0$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

**Resultado:** $\frac{3\pi}{2}$ (frontera antihoraria vista desde arriba).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

### Ejercicio propuesto 4B.6.13

*Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 6.*

Mediante el teorema de Stokes, calcule la circulación de $\vec{F} = y^2\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2$.

**Resultado:** $\pi$ (antihoraria vista desde arriba).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

### Ejercicio propuesto 4B.6.14

*Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 6.*

Calcule la circulación total de $\vec{F} = yz^2\,\hat{\imath} + x^2z\,\hat{\jmath} + xy^2\,\hat{k}$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 = 5 - z$, $z = 1$.

**Resultado:** $-4\pi$ (antihoraria vista desde arriba).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

## 4B.7 Errores frecuentes

1. **Gauss en una superficie abierta:** el teorema solo vale si la superficie **encierra** un volumen. «Solo el paraboloide» no es cerrada: se calcula directo o se cierra con una tapa y se resta su flujo.

## Apéndice B · Qué vino en cada examen (2016–2026)

↑ Volver al índice

Problemas en el orden del examen. Un examen repetido se cita por su aplicación más antigua, con la nota «repetido en…».

**Extraordinarios.**

| Examen | Problemas |
|---|---|
| 1er extraordinario 2018-1, tipo A | puntos críticos · aceleraciones tangencial y normal, y curvatura · divergencia en cilíndricas · trabajo sobre una curva cerrada (hipocicloide) · teorema de Green · flujo por una esfera |
| 2º extraordinario 2018-1, tipo A | puntos críticos · transformación ortogonal con parámetro · triedro, $\kappa$, $\tau$ y plano osculador · trabajo en cilíndricas · área entre dos curvas polares · circulación |
| 1er extraordinario 2018-2 | puntos críticos · gradiente de la divergencia · trabajo con campo conservativo en cilíndricas · volumen con integral doble · transformación no ortogonal · flujo con Gauss |
| 1er extraordinario 2024-1 | punto crítico con parámetro $k$ · triedro y planos del triedro · transformación, regiones y jacobiano · $\int_C f\,ds$ sobre una hélice · flujo por un paraboloide |
| 3er extraordinario 2024-1 (el mismo día se aplicó el 2º final 2024-1, tipo A, con cuatro problemas iguales) | puntos críticos en 3 variables · transformación $u, v, w$ y gradiente · curvatura de una intersección · trabajo en polares sobre un arco · circulación (Stokes) · flujo por una esfera |
| 1er extraordinario 2024-2 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1) | caja inscrita en un cono · tangencia curva–superficie · campo conservativo y solenoidal · trabajo en polares · integral doble con cambio de variable · flujo por una esfera |
| 2º extraordinario 2024-2 | Lagrange · recta: longitud de arco y curvatura · divergencia y rotacional en cilíndricas · independencia de la trayectoria y función potencial · Stokes · volumen entre cono y cilindro |
| 2º extraordinario 2025-1 | puntos críticos en 3 variables · ángulo curva–superficie · transformación lineal y rotacional · trabajo sobre una elipse · área de una superficie · flujo de un campo cilíndrico |
| 1er extraordinario 2025-2 | costo mínimo · curvatura y plano osculador · vector base, factor de escala y jacobiano · trabajo en esféricas · volumen bajo un paraboloide · flujo por una esfera de radio $a$ |





rotacional calculados y la integral planteada con sus límites. Solo eso ya vale cerca de la mitad del problema.

2. En la esfera de radio $a$: $\hat{n} = \frac{\vec{r}}{a}$ y $|\vec{r}| = a$, así que $\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{a\cdot a} = 1$.
3. Flujo $= 1 \cdot$ Área $= 4\pi a^2$.

*4B.3.9 Circulación con el teorema de Stokes*

1. Calcula $\nabla \times \vec{F}$ componente por componente.
2. Elige la superficie más sencilla con frontera $C$: el disco o la porción de plano que encierra la curva. Si es $z = g(x, y)$, $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$.
3. Calcula $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N}$ sobre la superficie. Si es constante, la circulación es esa constante por el **área de la sombra**.
4. Revisa el **sentido** de $C$: evalúa la parametrización en dos valores de $t$. Antihorario visto desde arriba: signo +; horario: signo −. Si el enunciado no lo dice, usa el sentido antihorario visto desde arriba y escríbelo.
5. Si queda un término con $x$ o $y$ sobre un disco centrado, vale cero por simetría.

## 4B.4 Ejemplo resuelto

*Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 6.*

Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ a través de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

**Datos:** $\vec{F} = (x, y, z)$; $S$: esfera de radio 3 [u], cerrada; normal exterior.

**Planteamiento.** La superficie es cerrada, así que se aplica el teorema de Gauss:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV$$

**Resolución.**

1. $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$, constante.
2. Radio $\sqrt{9} = 3$; volumen $V = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi$.
3. Flujo $= 3 \cdot 36\pi = 108\pi$.
4. **Comprobación directa:** en la esfera, $\hat{n} = \frac{\vec{r}}{3}$ y $\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3} = \frac{9}{3} = 3$. Flujo $= 3 \cdot$ Área $= 3 \cdot 4\pi(9) = 108\pi$.

**Resultado:** el flujo neto es $108\pi$ y es positivo: el campo sale de la esfera.

> Con divergencia constante, el problema se reduce a una fórmula de volumen. Antes de integrar cualquier flujo por una superficie cerrada, calcula la divergencia.

## 4B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

### Ejercicio 4B.5.1 · Área de una porción de superficie

*Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 5.*

Calcule el área de la porción de la superficie $z = x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2$.

**Resolución.**

1. $g_x = 2x$ y $g_y = -2y$, de donde $1 + g_x^2 + g_y^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2 = 1 + 4r^2$.





3. $s(t) = \int_1^t 10u\, du = 5t^2 - 5$.
4. $5t^2 - 5 = 40 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3$.
5. $\vec{r}(3) = (4 - 27,\ 5,\ 36) = (-23, 5, 36)$.

### Ejercicio 2A.6.7

← volver

1. Parametriza con $x = t$: $\vec{r}(t) = (t,\ t,\ 2t^2)$; el origen es $t_0 = 0$.
2. $\vec{r}\,' = (1, 1, 4t) \Rightarrow (1, 1, 0)$; $\vec{r}\,'' = (0, 0, 4)$.
3. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = (4, -4, 0)$, con norma $4\sqrt{2}$; $|\vec{r}\,'| = \sqrt{2}$.
4. a) $\hat{T} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$, $\hat{B} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$, $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = (0, 0, 1)$.
5. b) $\kappa = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$.
6. c) $\rho = \frac{1}{2}$; centro $= (0, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, 1) = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$.
7. d) Normal $(1, -1, 0)$ por el origen: $x - y = 0$.

### Ejercicio 2A.6.8

← volver

1. $2s + 3t = 1$ y $-s + 2t = -4$. De la segunda, $s = 2t + 4$; en la primera, $7t + 8 = 1$, así que $t = -1$ y $s = 2$.
2. $z = 2(-1)^2 - 3(2) = -4$: el punto es $(1, -4, -4)$.
3. $\vec{r}_s = (2, -1, -3)$ y $\vec{r}_t = (3, 2, 4t) = (3, 2, -4)$.
4. $\vec{N} = \vec{r}_s \times \vec{r}_t = \big((-1)(-4) - (-3)(2),\ -[(2)(-4) - (-3)(3)],\ (2)(2) - (-1)(3)\big) = (10, -1, 7)$.
5. Plano: $10(x - 1) - (y + 4) + 7(z + 4) = 0$, es decir, $10x - y + 7z + 14 = 0$.
6. Recta normal: $\frac{x-1}{10} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+4}{7}$.

### Ejercicio 2A.6.9

← volver

1. El punto está en las dos superficies: $9 + 4 + 36 = 49$ y $9 + 4 = 13$.
2. $\vec{N}_1 = \nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z) = (6, 4, -12)$ y $\vec{N}_2 = \nabla(x^2 + y^2) = (2x, 2y, 0) = (6, 4, 0)$.
3. $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \big((4)(0) - (-12)(4),\ -[(6)(0) - (-12)(6)],\ (6)(4) - (4)(6)\big) = (48, -72, 0) = 24\,(2, -3, 0)$.
4. Recta por $(3, 2, -6)$ con dirección $(2, -3, 0)$: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3}$, $z = -6$.

## E.2B · Unidad 2 · Parte B · Funciones vectoriales: coordenadas curvilíneas, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

### Ejercicio 2B.6.1

← volver

1. a) $\nabla u = (1, -2)$ y $\nabla v = (1, 2)$; $\nabla u \cdot \nabla v = 1 - 4 = -3 \neq 0$: **no es ortogonal**.
2. b) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4}$.
3. c) Sumando, $u + v = 2x$; restando, $v - u = 4y$. Inversa: $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{v-u}{4}$.
4. d) $\vec{r}_u = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y $\vec{r}_v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; $h_u = h_v = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

### Ejercicio 4B.5.4 · Integral triple en cilíndricas

*Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 5.*

Calcule $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, donde $V$ es el sólido acotado por $z=0$, $z=4$ y $x^2+y^2=9$.

**Resolución.**

1. Cilindro de radio 3: $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le 3$, $0\le z\le 4$.
2. Integrando $\sqrt{x^2+y^2}=r$; $dV=r\,dr\,d\theta\,dz$.
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^4 r\cdot r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^3 4r^2\,dr\,d\theta$.
4. En $r$: $4\cdot\frac{3^3}{3}=36$. En $\theta$: $36\cdot 2\pi$.

**Resultado:** $72\pi$.

### Ejercicio 4B.5.5 · Stokes con una curva en sentido horario

*Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 5.*

Mediante el teorema de Stokes obtenga $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}=-y\,\hat{\imath}+x\,\hat{\jmath}+\operatorname{sen} z\,\hat{k}$ y $C:\ \vec{r}(t)=\operatorname{sen} t\,\hat{\imath}+\cos t\,\hat{\jmath}+4\,\hat{k}$.

**Resolución.**

1. $\nabla\times\vec{F}=\big(0-0,\ 0-0,\ 1-(-1)\big)=(0,0,2)$.
2. $C$ es la circunferencia de radio 1 en el plano $z=4$. Superficie: el disco que encierra, con $\hat{n}=\hat{k}$.
3. $(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{k}=2$, constante: $\iint_S 2\,dS=2\pi$ en sentido antihorario.
4. **Sentido:** $t=0$ da $(0,1)$ y $t=\frac{\pi}{2}$ da $(1,0)$; la curva va de arriba hacia la derecha, en sentido **horario** visto desde arriba. El signo cambia.
5. Comprobación directa: $\vec{F}\cdot\vec{r}\,'=(-\cos t)(\cos t)+(\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)=-1$, y $\int_0^{2\pi}-1\,dt=-2\pi$.

**Resultado:** $-2\pi$.

### Ejercicio 4B.5.6 · Stokes en un plano inclinado

*Adaptado de: 2º final 2024-1, tipo A, problema 5.*

Calcule la circulación de $\vec{F}=(2x-2y)\,\hat{\imath}+(y-z)\,\hat{\jmath}+(x-z)\,\hat{k}$ en una vuelta, en sentido positivo, a la curva $C$ de intersección del plano $2x+2y-z=0$ con el cilindro $x^2+y^2=1$.

**Resolución.**

1. $\nabla\times\vec{F}=\big(0-(-1),\ 0-1,\ 0-(-2)\big)=(1,-1,2)$.
2. Superficie: la porción del plano $z=2x+2y$ dentro del cilindro. $\vec{N}=(-2,-2,1)$, hacia arriba (sentido positivo).
3. $(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{N}=-2+2+2=2$, constante.
4. Sombra: disco de radio 1, de área $\pi$. Circulación $=2\pi$.

**Resultado:** $2\pi$.

### Ejercicio 4B.5.7 · Gauss en un cono con tapa

*Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 6.*

Calcule el flujo neto de $\vec{F}=x\,\hat{\imath}+y\,\hat{\jmath}+z\,\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por el





1. $f_x=-4x(x^2-4)=0\Rightarrow x=0$ o $x=\pm2$; $f_y=2(y+1)=0\Rightarrow y=-1$; $f_z=2z=0\Rightarrow z=0$.
2. $H=\operatorname{diag}(16-12x^2,\ 2,\ 2)$.
3. $(0,-1,0)$: $(16,32,64)$, **mínimo relativo**; $f=-(0-4)^2=-16$.
4. $(\pm2,-1,0)$: $(-32,-64,-128)$, signos $(-,-,-)$, **puntos silla**; $f=0$.

### Ejercicio 1.6.7

← volver

1. Vértice $(x,y,z)$ en el primer octante, sobre el elipsoide; lados $2x$, $2y$, $z$. Objetivo $V=4xyz$; restricción $g=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.
2. $\nabla V=\lambda\nabla g$: $4yz=\frac{\lambda x}{2}$, $4xz=\frac{\lambda y}{2}$, $4xy=\frac{2\lambda z}{9}$.
3. Multiplicando cada ecuación por su variable: $4xyz=\frac{\lambda x^2}{2}=\frac{\lambda y^2}{2}=\frac{2\lambda z^2}{9}$. De ahí $x=y$ y $z^2=\frac{9}{4}x^2$.
4. En la restricción: $\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}=1\Rightarrow x^2=\frac{4}{3}\Rightarrow x=y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, y $z=\frac{3}{2}x=\sqrt{3}$.
5. Lados: $\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}$; $V=4\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

### Ejercicio 1.6.8

← volver

1. Objetivo $d^2=x^2+y^2+z^2$; restricción $g=z-4x^2+4y^2=5$.
2. $\nabla d^2=\lambda\nabla g$: $2x=-8\lambda x$, $2y=8\lambda y$, $2z=\lambda$.
3. Factoriza: $2x(1+4\lambda)=0$ y $2y(1-4\lambda)=0$.
4. Caso $x=0$, $y=0$: $z=5$, $d=5$.
5. Caso $x=0$, $\lambda=\frac{1}{4}$: $z=\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{8}+4y^2=5\Rightarrow y^2=\frac{39}{32}=\frac{78}{64}$, $y=\pm\frac{\sqrt{78}}{8}$; $d^2=\frac{78}{64}+\frac{1}{64}=\frac{79}{64}$.
6. Caso $\lambda=-\frac{1}{4}$, $y=0$: $z=-\frac{1}{8}$ y $-\frac{1}{8}-4x^2=5$, imposible.
7. Comparación: $\frac{\sqrt{79}}{8}\approx 1.11<5$. **Punto** $\left(0,\pm\frac{\sqrt{78}}{8},\frac{1}{8}\right)$**, distancia** $\frac{\sqrt{79}}{8}$**.**

## E.2A · Unidad 2 · Parte A · Funciones vectoriales: curvas, triedro móvil, curvatura, torsión y normal a una superficie

### Ejercicio 2A.6.1

← volver

1. $t^2=1$, $-t=-1$ y $-t^2=-1$ dan $t_0=1$.
2. $\vec{v}=(2t,-1,-2t)\Rightarrow(2,-1,-2)$, $|\vec{v}|=3$; $\vec{a}=(2,0,-2)$.
3. $a_T=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}|}=\dfrac{4+0+4}{3}=\dfrac{8}{3}$.
4. $\vec{a}_T=\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{(2,-1,-2)}{3}=\dfrac{1}{9}(16,-8,-16)$.
5. $\vec{a}_N=\vec{a}-\vec{a}_T=\dfrac{1}{9}(18,0,-18)-\dfrac{1}{9}(16,-8,-16)=\dfrac{1}{9}(2,8,-2)$. Comprobación: $\vec{a}_N\cdot\vec{v}=\frac{1}{9}(4-8+4)=0$.

### Ejercicio 2A.6.2

← volver

1. $e^{2t}=e^{2\pi}\Rightarrow t_0=\pi$. Comprobación: $\cos 2\pi=1$.
2. $\vec{r}\,'=(2e^{2t},\ -2\operatorname{sen}2t,\ 0)\Rightarrow(2e^{2\pi},0,0)$; $\vec{r}\,''=(4e^{2t},\ -4\cos 2t,\ 0)\Rightarrow(4e^{2\pi},-4,0)$.

El enunciado tiene dos detalles: $\ln y$ no está definido para $y \leq 0$, y el plano inclinado queda por debajo de $z = -2$ donde $x + y < -4$. El problema se resuelve formalmente con el teorema de Gauss, como arriba.

### Ejercicio 4B.5.11 · Gauss con integración en cilíndricas

*Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 6.*

Obtenga el flujo neto de $\vec{F} = 4xyz\,\hat{\imath} + x^2y\,\hat{\jmath} - 2yz^2\,\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por $z = 0$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.

**Resolución.**

1. $P_x = 4yz$, $Q_y = x^2$, $R_z = -4yz$: $\nabla \cdot \vec{F} = x^2$.
2. Sólido: $0 \leq z \leq 4 - r^2$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Con $x^2 = r^2\cos^2\theta$:
3. Flujo $= \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} r^2\cos^2\theta\; r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^2\left(4r^3 - r^5\right)dr$.
4. $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \pi$ y $\int_0^2(4r^3 - r^5)\,dr = 16 - \frac{64}{6} = \frac{16}{3}$.

**Resultado:** $\frac{16\pi}{3}$.

### Ejercicio 4B.5.12 · Campo en cilíndricas a través de una caja

*Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 6.*

Calcule el flujo neto del campo $\vec{E}(r,\theta,z) = r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z$, expresado en coordenadas cilíndricas circulares, a través de la superficie cerrada de la caja $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 4$.

**Resolución.**

1. $F_r = r$, $F_\theta = 0$, $F_z = z$.
2. $\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot r)}{\partial r} = \frac{2r}{r} = 2$; $\frac{1}{r}\frac{\partial 0}{\partial\theta} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$. Entonces $\nabla \cdot \vec{E} = 3$.
3. Comprobación: $r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$, con divergencia $1 + 1 + 1 = 3$.
4. $V = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$. Flujo $= 3 \cdot 12$.

**Resultado:** 36 (sin $\pi$: el sólido es una caja).

### Ejercicio 4B.5.13 · ¿Entra o sale el fluido?

*Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 4.*

Suponga que $\vec{F}(r,\theta,z) = r\cos\theta\,\hat{e}_r + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_\theta + z\,\hat{e}_z$ modela el flujo de un fluido. En el punto $A\left(17, \frac{2\pi}{3}, -2\right)$, ¿es más el fluido que entra del que sale?

**Resolución.**

1. Término 1: $r\,F_r = r^2\cos\theta$; derivado respecto a $r$, $2r\cos\theta$; entre $r$, $2\cos\theta$.
2. Término 2: $F_\theta = r\,\mathrm{sen}\,\theta$; derivado respecto a $\theta$, $r\cos\theta$; entre $r$, $\cos\theta$.
3. Término 3: $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$.
4. $\nabla \cdot \vec{F} = 3\cos\theta + 1$. Los valores $r = 17$ y $z = -2$ no intervienen.
5. En $\theta = \frac{2\pi}{3}$: $3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{2} < 0$.

**Resultado:** $\nabla \cdot \vec{F}(A) = -\frac{1}{2}$: el punto es un sumidero y **sí entra más fluido del que sale**.





# Apéndice D · Fuentes y bibliografía

↑ Volver al índice

**Exámenes de los que se adaptaron los ejercicios:**

- Exámenes extraordinarios de *Cálculo Vectorial*, semestres 2018-1, 2018-2, 2024-1, 2024-2, 2025-1, 2025-2 y 2026-1, algunos con su resolución publicada. Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Primeros y segundos exámenes finales de *Cálculo Vectorial*, semestres 2016-1 a 2018-2 y 2024-1 a 2025-2, varios con su resolución publicada. Facultad de Ingeniería, UNAM.

**Material de consulta:**


- Belaunzarán García, E.; Frontana de la Cruz, B.; Gómez Saavedra, R.; González Gutiérrez, E.; Patiño Ramírez, J. A.; Rivas Gómez, S. *Apuntes de Cálculo Vectorial*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 1981.
- González Gutiérrez, E.; Patiño Ramírez, J.; Tristán López, A. *Guía de estudio para presentar examen extraordinario de Cálculo Vectorial*. Facultad de Ingeniería, UNAM, 1986.
- Ramírez Manny, P. *Serie de Cálculo Vectorial* (problemas resueltos).
- *Series de ejercicios de Cálculo Vectorial*: 1. Máximos y mínimos; 2. Funciones vectoriales; 3. Integrales de línea; 4. Integrales múltiples. Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Pita Ruiz, C. *Cálculo Vectorial*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1995.
- Marsden, J. E.; Tromba, A. J. *Cálculo Vectorial*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1995.
- Programa de la asignatura *Cálculo Vectorial* (clave 0063), plan de estudios 2010. Facultad de Ingeniería, UNAM.

donde $S$ está formada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = -1$ y $z = 1$.

**Resultado:** $16\pi$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

### Ejercicio propuesto 4B.6.5

*Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo A, problema 6, repetido en el tipo B.*

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = \left(x^3 + \ln z\right)\hat{\imath} + \left(e^x - 3x^2 y\right)\hat{\jmath} + (\cos x + z)\hat{k}$ a través de la superficie cerrada formada por $z = 0$, $y + z = 16$ y $x^2 + y^2 = 4$.

**Resultado:** $64\pi$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

### Ejercicio propuesto 4B.6.6

*Adaptado de: 2º final 2017-2, tipo A, problema 6.*

Calcule el flujo neto de $\vec{F} = \left(x^2 - yz\right)\hat{\imath} + \left(z^2 - 2xy\right)\hat{\jmath} + \left(z^2 - xy\right)\hat{k}$ a través de la superficie cerrada limitada por el semicono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z \geq 0$, y el plano $z = 3$.

**Resultado:** $\frac{81\pi}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

### Ejercicio propuesto 4B.6.7

*Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo A, problema 6.*

Sea $S$ la superficie $9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ y sea $\vec{F} = \left(\operatorname{sen} z - y^2 x\right)\hat{\imath} + \left(\cos z - x^2 y\right)\hat{\jmath} + (4z - e^{xy})\hat{k}$. Calcule el flujo neto de $\vec{F}$ a través de $S$.

**Resultado:** $\frac{192\pi}{5}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

### Ejercicio propuesto 4B.6.8

*Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 5.*

Calcule $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$ en la región $D$ limitada por $x^2 + y^2 = 16$, $z = -5$ y $z = 4$.

**Resultado:** $384\pi$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

### Ejercicio propuesto 4B.6.9

*Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 6.*

Calcule el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ localizada en el primer octante y limitada por los planos $x = 0$, $y = x$ y $z = 0$.

**Resultado:** $4\pi$ u².

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.





| Examen | Problemas |
|---|---|
| 2º final 2025-2, tipo A | puntos críticos · triedro y plano normal · campo solenoidal en cilíndricas · trabajo sobre un triángulo · área entre parábolas · flujo con Gauss |

2. **Divergencia incompleta:** son siempre tres derivadas. Si una letra no aparece en su componente, ese término vale 0, pero se escribe.
3. **Derivar respecto a la letra equivocada:** $P$ con $x$, $Q$ con $y$, $R$ con $z$. Nunca $P$ con $y$.
4. **Fórmulas de volumen:** el cono lleva $\frac{1}{3}$; la esfera, $\frac{4}{3}$ y $r^3$, no $r^2$.
5. **Radio contra radio al cuadrado:** $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ tiene radio 5.
6. **Divergencia en cilíndricas:** el primer término se multiplica por $r$ antes de derivar: $\nabla \cdot (r\,\hat{e}_r) = 2$, no 1.
7. **Campo $\vec{r}/|\vec{r}|$:** no tiene divergencia constante; el flujo por la esfera es su área, $4\pi a^2$.
8. **Orientación:** «hacia la parte negativa del eje $Z$» cambia el signo de $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$.
9. **Sentido en Stokes:** revisa la parametrización con dos valores de $t$. $(\operatorname{sen} t, \cos t)$ va en sentido horario.
10. **Olvidar el jacobiano:** $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$ en cilíndricas y $\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ en esféricas; en la esfera, $dS = a^2 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$.
11. **Simetría mal usada:** $\iiint x\,dV = 0$ solo si el sólido es simétrico respecto al plano $x = 0$. En un octante no se anula.
12. **Signo de la divergencia:** negativa significa que entra más fluido del que sale; positiva, que sale más.

### 4B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $z = g(x, y)$: $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$, $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,dA$ · paramétrica: $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.
- Esfera: $dS = a^2 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$, $\hat{n} = \vec{r}/a$ · cilindro: $dS = a\,d\theta\,dz$.
- Flujo: $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\,dS = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,du\,dv$.
- $dV$: cilíndricas $r\,dr\,d\theta\,dz$; esféricas $\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$.
- Divergencia: $P_x + Q_y + R_z$ · cilíndricas: $\frac{1}{r}\partial_r(rF_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta F_\theta + \partial_z F_z$.
- Gauss: $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\,dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\,dV$ (cerrada, normal exterior).
- Rotacional: $(R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$ · Stokes: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\,dS$ (antihoraria desde arriba con normal hacia arriba).
- Esfera $\frac{4}{3}\pi a^3$, área $4\pi a^2$ · cilindro $\pi r^2 h$ · cono $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ · paraboloide $z = h - r^2$: $\frac{1}{2}\pi h^2$.
- $\int r\sqrt{1 + 4r^2}\,dr = \frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12}$ · $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \pi$ · $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\,d\phi = 2$.

### 4B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe qué tipo de problema es: área o integral de superficie, flujo directo, triple, Gauss o Stokes.
2. Para un flujo: ¿la superficie es cerrada? Si sí, escribe el teorema de Gauss y calcula la divergencia término por término.
3. Con divergencia constante: medidas del sólido, volumen de tabla y producto. Con divergencia variable: simetría primero, luego la integral triple en cilíndricas o esféricas.
4. Para Stokes: rotacional, superficie más sencilla, $\vec{N}$, producto punto y **sentido** de la curva.
5. Escribe el elemento ($dS$ o $dV$) con su factor antes de poner límites.
6. Recuadra el resultado exacto y, si es un flujo, di si sale o entra.

Si no se encuentra el camino, escribe el teorema que corresponde, la divergencia o el





| Examen | Problemas |
|---|---|
| 2º extraordinario 2025-2 | tanque con extremos semiesféricos · $a_T$, $a_N$, $\kappa$ y $\tau$ · transformación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ · divergencia en cilíndricas · trabajo contra la gravedad en una hélice · flujo con Gauss |
| 1er extraordinario 2026-1 | tanque de costo mínimo · transformación $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ · $\int_C f\,ds$ sobre un segmento · constantes para campo solenoidal y conservativo · integral triple en cilíndricas · flujo por una esfera |

**Finales.** Mismo formato.

| Examen | Problemas |
|---|---|
| 1er final 2016-1, tipo A | puntos críticos en 3 variables · curvatura y torsión · constante para campo conservativo y potencial en polares · trabajo en polares · integral triple · flujo con Gauss |
| 1er final 2016-1, tipo C | caja sin tapa de costo mínimo · curvatura de una curva plana · gradiente con una transformación · trabajo en polares · área entre curvas · circulación |
| 2º final 2016-1, tipo A | puntos críticos en 3 variables · aceleraciones tangencial y normal · laplaciano en cilíndricas · integral de línea por segmentos · área con Green · área de una porción de esfera |
| 1er final 2016-2, tipo A | lata con Lagrange · constantes para transformación ortogonal y gradiente · trabajo · longitud de arco y aceleración normal · área de una porción de plano · flujo con Gauss |
| 1er final 2016-2, tipo C | extremos con restricción · partícula: posición, $a_T$, $a_N$ y curvatura · divergencia y rotacional en cilíndricas · integral de línea $\int_C \vec{R} \times d\vec{r}$ · circulación · flujo con Gauss |
| 2º final 2016-2, tipo A | puntos críticos en 3 variables · ángulo entre superficies · transformación ortogonal y laplaciano · integral de línea con campo conservativo · integral de superficie · flujo de un campo cilíndrico |
| 1er final 2017-1, tipo A | puntos críticos en 3 variables · curvatura, torsión, $a_T$ y $a_N$ · laplaciano en curvilíneas · trabajo · flujo con Gauss · área de un cilindro |
| 1er final 2017-1, tipo C | caja con tapa de volumen máximo · triedro móvil · laplaciano en cilíndricas · función potencial · área con integral doble · flujo con Gauss |
| 2º final 2017-1, tipo A | distancia mínima y máxima con Lagrange · curvatura de una intersección · integral de línea cerrada · transformación ortogonal · trabajo con Stokes · flujo con Gauss |

# Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

**Geometría que se usa en los problemas aplicados:**

- Cilindro: $V = \pi r^2 h$ · pared $2\pi rh$ · base y tapa $2\pi r^2$ (si está abierto, $\pi r^2$).
- Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ · $A = 4\pi r^2$ · cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- Caja: $V = xyz$ · con tapa $A = 2(xy + xz + yz)$ · sin tapa $A = xy + 2xz + 2yz$.

**Cálculo base (sin calculadora):**

- $\int \sec^2 u\,du = \tan u \cdot \int \ln x\,dx = x\ln x - x \cdot \int r\,e^{ar^2}dr = \frac{e^{ar^2}}{2a} \cdot \int r\sqrt{1+4r^2}\,dr = \frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12}$.
- $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \pi \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\,d\phi = 2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$.
- $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 \cdot (\cosh t)' = \operatorname{senh} t \cdot (\operatorname{senh} t)' = \cosh t$.

| Tema | Expresiones |
|---|---|
| Extremos (U1) | puntos críticos: $\nabla f = \vec{0} \cdot D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$: $D>0, f_{xx}>0$ mínimo; $D>0, f_{xx}<0$ máximo; $D<0$ silla; $D=0$ no decide · 3 variables: $(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3) = (+,+,+)$ mínimo, $(-,+,-)$ máximo, otro con $\Delta_3 \neq 0$ silla · Lagrange: $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = c$ |
| Curvas (U2A) | $\hat{T} = \frac{\vec{r}\,'}{\lvert\vec{r}\,'\rvert} \cdot \hat{B} = \frac{\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''}{\lvert\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\rvert} \cdot \hat{N} = \hat{B}\times\hat{T} \cdot \kappa = \frac{\lvert\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\rvert}{\lvert\vec{r}\,'\rvert^3} \cdot \tau = \frac{(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'')\cdot\vec{r}\,'''}{\lvert\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\rvert^2} \cdot$ $a_T = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{\lvert\vec{v}\rvert} \cdot a_N = \frac{\lvert\vec{v}\times\vec{a}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert} \cdot s = \int\lvert\vec{r}\,'\rvert\,dt$ · plano osculador $\perp \hat{B}$, normal $\perp \hat{T}$, rectificante $\perp \hat{N}$ · tangencia: $\vec{r}\,' \cdot \nabla F = 0$ · ángulo curva–superficie: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\lvert\vec{r}\,'\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{r}\,'\rvert\lvert\vec{n}\rvert}$ |
| Coordenadas curvilíneas (U2B) | directa $x(u,v)$: $h_u = \lvert\vec{r}_u\rvert$, $\hat{e}_u = \vec{r}_u/h_u$ · inversa $u(x,y)$: $h_u = 1/\lvert\nabla u\rvert$, $\hat{e}_u = \nabla u/\lvert\nabla u\rvert$ · $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)}$ · ortogonal: $\lvert J\rvert = h_u h_v h_w$ · $a_u = \vec{a}\cdot\hat{e}_u$ · cilíndricas $h = (1, r, 1)$ · esféricas $h = (1, \rho\operatorname{sen}\phi, \rho)$ |
| Operadores (U2B) | $\nabla f = \sum \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\hat{e}_i$ · $\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\partial_1(h_2h_3F_1) + \partial_2(h_1h_3F_2) + \partial_3(h_1h_2F_3)\right]$ · $\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}$ con $(q_1,q_2,q_3)$ dextrógiro (esféricas: $(\rho,\phi,\theta)$) · solenoidal: $\nabla\cdot\vec{F} = 0$ · irrotacional: $\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$ |
| Integrales de línea (U3) | $\int_C f\,ds = \int f(\vec{r}(t))\lvert\vec{r}\,'(t)\rvert dt$ · $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$ · segmento $\vec{r} = A + t(B-A)$, $t\in[0,1]$ · $\nabla\times\vec{F} = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$ · conservativo: $W = \varphi(B) - \varphi(A)$ · curvilíneas: $d\vec{r} = \sum h_i\,dq_i\,\hat{e}_i$ |
| Integrales dobles (U4A) | $dA = r\,dr\,d\theta \cdot dA = \lvert J(\frac{x,y}{u,v})\rvert\,du\,dv \cdot V = \iint(z_{techo} - z_{piso})\,dA$ · Green: $\oint P\,dx + Q\,dy = \iint(Q_x - P_y)\,dA$ (antihorario) |





| Tema | Expresiones |
|---|---|
| Superficie, triples, Stokes y Gauss (U4B) | $dV = r\,dr\,d\theta\,dz \cdot dV = \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ · área: $\iint\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dA \cdot z = g(x,y)$: $\vec{N} = (-g_x, -g_y, 1)$ · Gauss: $\oiint\vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint\nabla\cdot\vec{F}\,dV$ · Stokes: $\oint\vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{N}\,dA$ |